5.3 Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

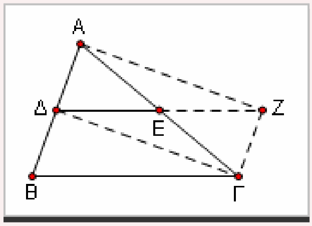
Θεωρία

Α Εφαρμογές στα τρίγωνα

Α1 Θεώρημα 1

Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη



Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$

και τα μέσα $Δ$, $Ε$ των $ΑΒ$, $ΑΓ$ αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε ότι $ΔΕ = // \frac{ΒΓ}{2}$

Προεκτείνουμε τη $ΔΕ$ κατά τμήμα $ΕΖ = ΔΕ$

Το τετράπλευρο $ΑΔΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Άρα $ΑΔ = // ΓΖ$, οπότε $ΔΒ = // ΓΖ$, αφού $ΑΔ = ΔΒ$

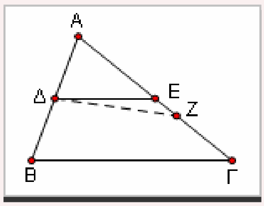
Έτσι το τετράπλευρο $ΔΖΓΒ$ είναι παραλληλόγραμμο

Οπότε $ΔΖ // ΒΓ$ και συνεπώς $ΔΕ // ΒΓ$ και $ΔΖ = ΒΓ$ ή $2ΔΕ = ΒΓ$ ή $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$

Α2 Θεώρημα 2

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη



Θεωρούμε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ και φέρνουμε

από το μέσο $Δ$ της $ΑΒ$ την παράλληλη προς την $ΒΓ$

που τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$

Θα αποδείξουμε ότι το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΓ$

Έστω ότι το $Ε$ δεν είναι μέσο της $ΑΓ$

Αν $Ζ$ είναι το μέσο της $ΑΓ$, το τμήμα $ΔΖ$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$, $ΑΓ$ οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $ΔΖ // ΒΓ$

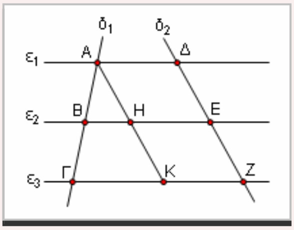
Έτσι όμως, έχουμε από το $Δ$ δύο παράλληλες προς τη $ΒΓ$, που είναι άτοπο.

Άρα το $Ε$ είναι **μέσο** της $ΑΓ$

Α3 Θεώρημα 3

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη



Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία $Α$, $Β$, $Γ$ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ$, $ΒΓ$

Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία $Δ$, $Ε$, $Ζ$ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι $ΔΕ = ΕΖ$

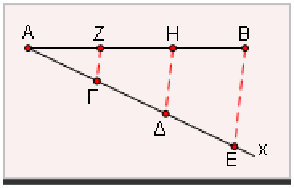
Φέρνουμε $ΑΚ // ΔΖ$

Τότε τα τετράπλευρα $ΑΔΕΗ$ και $ΕΖΚΗ$ είναι παραλληλόγραμμα οπότε $ΑΗ = ΔΕ$ **(1)** και $ΗΚ = ΕΖ$ **(2)**

Στο τρίγωνο $ΑΚΓ$ το $Β$ είναι το μέσο της $ΑΓ$ και $ΒΗ // ΓΚ$

Άρα το $Η$ είναι μέσο της $ΑΚ$, δηλαδή $ΑΗ = ΗΚ$ **(3)**

Από τις **(1)**, **(2)** και **(3)** προκύπτει ότι $ΔΕ = ΕΖ$



Για να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ$ σε τρία ίσα κομμάτια, εργαζόμαστε ως εξής:

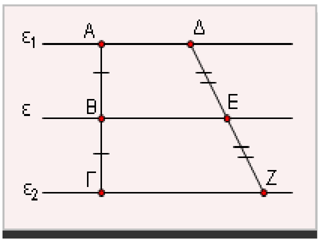
Φέρνουμε μια τυχαία ημιευθεία $Αx$ και πάνω σε αυτή παίρνουμε τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ$

Ενώνουμε το σημείο $Ε$ με το σημείο $Β$ και στη συνέχεια από τα σημεία $Γ$ και $Δ$ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς την $ΕΒ$, ο οποίες τέμνουν το τμήμα $ΑΒ$ στα σημεία $Ζ$ και $Η$.

Τότε χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι $ΑΖ = ΖΗ = ΗΒ$

Να χωρίσετε το παραπάνω τμήμα $ΑΒ$ σε 5 ίσα κομμάτια.

Α4 Μεσοπαράλληλος



Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ε_1 και ε_2

Β Βαρύκεντρο και ορθόκεντρο τριγώνου

Β1 Βαρύκεντρο

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο λέγεται βαρύκεντρο και του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

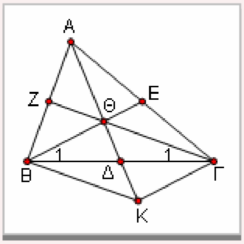
Έστω τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$

Φέρνουμε τις δύο διαμέσους $\mathbf{BE}$ και $\mathbf{\Gamma Z}$

Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^\circ$

οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε εσωτερικό σημείο $\mathbf{\Theta}$ του $\mathbf{AB\Gamma}$

Αν η $\mathbf{A\Theta}$ τέμνει τη $\mathbf{B\Gamma}$ στο $\mathbf{\Delta}$



θα αποδείξουμε ότι α) η $\mathbf{A\Delta}$ είναι η τρίτη διάμεσος, δηλαδή $\mathbf{B\Delta = \Gamma\Delta}$

β) $\mathbf{A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta}$

Πραγματικά

α) Στην ημιευθεία $\mathbf{\Theta\Delta}$ παίρνουμε τμήμα $\mathbf{\Theta K = A\Theta}$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία $\mathbf{E}$, $\mathbf{\Theta}$ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\mathbf{AK\Gamma}$

Οπότε $\mathbf{E\Theta = /\!/ \frac{\Gamma K}{2}}$ **(1)** και όμοια από το τρίγωνο $\mathbf{ABK}$ έχουμε $\mathbf{Z\Theta = /\!/ \frac{BK}{2}}$ **(2)**

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\mathbf{BE /\!/ \Gamma K}$ και $\mathbf{\Gamma Z /\!/ BK}$

δηλαδή το $\mathbf{B\Theta\Gamma K}$ είναι παραλληλόγραμμο **(3)**

Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε $\mathbf{B\Delta = \Gamma\Delta}$

Το σημείο αυτό $\mathbf{\Theta}$ λέγεται βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους του τριγώνου.

β) Από το παραλληλόγραμμο $\mathbf{B\Theta\Gamma K}$ έχουμε ακόμη

$\mathbf{\Theta\Delta = \Delta K = \frac{\Theta K}{2}}$, άρα $\mathbf{\Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2}}$ ή $\mathbf{A\Theta = 2\Theta\Delta}$.

Από τις **(1)** και **(3)** προκύπτει ότι $\mathbf{E\Theta = \frac{\Gamma K}{2} = \frac{B\Theta}{2}}$ ή $\mathbf{B\Theta = 2\Theta E}$.

Όμοια από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $\mathbf{\Gamma\Theta = 2\Theta Z}$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

Επίσης έχουμε ότι $\mathbf{A\Delta = A\Theta + \Theta\Delta = 2\Theta\Delta + \Theta\Delta = 3\Theta\Delta}$

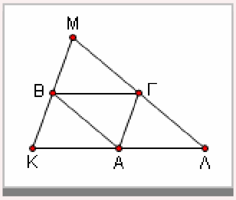
Άρα $\mathbf{\Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta}$, οπότε $\mathbf{A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta}$

Όμοια προκύπτει ότι $\mathbf{B\Theta = \frac{2}{3}BE}$ και $\mathbf{\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z}$

Β2 Πρόταση

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

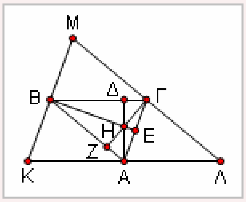


Από τις κορυφές **Α** , **Β** , **Γ** τριγώνου **ΑΒΓ** φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο **ΚΛΜ**
Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων **ΚΑΓΒ** , **ΛΑΒΓ** και **ΜΒΑΓ**
έχουμε **ΚΑ** = **ΒΓ** = **ΑΛ** , **ΛΓ** = **ΑΒ** = **ΓΜ** και **ΚΒ** = **ΑΓ** = **ΒΜ**
Επομένως τα σημεία **Α** , **Β** , **Γ** είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου **ΚΛΜ**

Β3 Ορθόκεντρο

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο λέγεται ορθόκεντρο.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο **ΑΒΓ** και τα ύψη του **ΑΔ** , **ΒΕ** και **ΓΖ**
Από τις κορυφές του **Α** , **Β** , **Γ** φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, στο τρίγωνο **ΚΛΜ** τα σημεία **Α** , **Β** , **Γ** είναι τα μέσα των πλευρών του.
Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες **ΑΔ** , **ΒΕ** και **ΓΖ** είναι κάθετες στις **ΚΛ** , **ΚΜ** και **ΜΛ** αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις **ΒΓ** , **ΑΓ** και **ΑΒ**) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες **ΑΔ** , **ΒΕ** και **ΓΖ** είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου **ΚΛΜ** , οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο **Η**
Το σημείο **Η** λέγεται ορθόκεντρο του τριγώνου **ΑΒΓ**

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

Β4 Πόρισμα

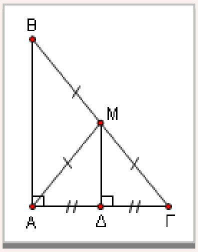
Οι κορυφές **Α** , **Β** , **Γ** , τριγώνου **ΑΒΓ** και το ορθόκεντρό του **Η** αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

Γ Ιδιότητες ορθογώνιου τριγώνου

Γ1 Θεώρημα 1

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ ($\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$)
και τη διάμεσό του $\mathbf{AM}$

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{AM} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Φέρουμε τη διάμεσο $\mathbf{M\Delta}$ του τριγώνου $\mathbf{AM\Gamma}$

Το $\mathbf{M\Delta}$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $\mathbf{AB\Gamma}$, οπότε $\mathbf{M\Delta // AB}$

Αλλά $\mathbf{AB \perp A\Gamma}$, επομένως και $\mathbf{M\Delta \perp A\Gamma}$

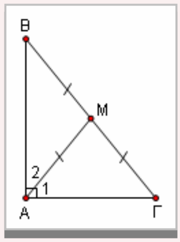
Άρα το $\mathbf{M\Delta}$ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $\mathbf{AM\Gamma}$, οπότε $\mathbf{AM = M\Gamma}$

δηλαδή $\mathbf{AM} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Γ2 Θεώρημα 2

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη



Θεωρούμε τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ και τη **διάμεσό** του $\mathbf{AM}$

Αν $\mathbf{AM} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$, θα αποδείξουμε ότι $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$

Επειδή $\mathbf{AM} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$ έχουμε $\mathbf{AM = M\Gamma}$, οπότε $\hat{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \hat{\mathbf{\Gamma}}$ **(1)**

και $\mathbf{AM = MB}$, οπότε $\hat{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \hat{\mathbf{B}}$ **(2)**

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\hat{\mathbf{A}}_\mathbf{1} + \hat{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}}$, δηλαδή $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}}$

Αλλά $\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{180^o}$, οπότε $\mathbf{2}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{180^o}$ ή $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$

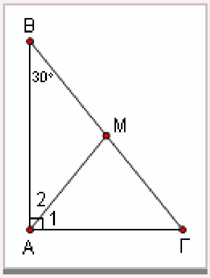
Παρατηρούμε ότι η διάμεσος προς την υποτείνουσα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το χωρίζει πάντα σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση, η διάμεσος προς την υποτείνουσα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, να το χωρίζει σε δύο ισόπλευρα τρίγωνα.

Γ3 Πόρισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Απόδειξη



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με $\hat{B} = 30^\circ$

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{A\Gamma} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Φέρουμε τη διάμεσο $\mathbf{AM}$ και είναι $\mathbf{AM} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}} = \mathbf{M\Gamma}$

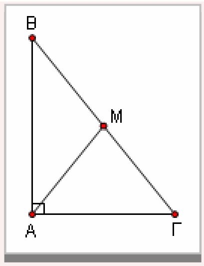
Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $\mathbf{AM\Gamma}$ είναι **ισόπλευρο**.

Επομένως $\mathbf{A\Gamma} = \mathbf{M\Gamma} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Αντίστροφα

αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ είναι $\mathbf{A\Gamma} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$, τότε θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$

Απόδειξη



Φέρουμε τη διάμεσο $\mathbf{AM}$

Είναι προφανές ότι $\mathbf{AM} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}} = \mathbf{M\Gamma} = \mathbf{A\Gamma}$

Άρα το τρίγωνο $\mathbf{AM\Gamma}$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$

Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του είναι 60° , τότε η προσκείμενη κάθετη πλευρά στην γωνία αυτή, θα είναι το μισό της υποτείνουσας.

Να δείξετε ότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η μία κάθετη πλευρά του είναι μισή της υποτείνουσας, τότε η μία οξεία γωνία του θα είναι διπλάσια από την άλλη.

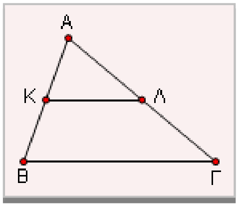
Μεθοδολογία

α Εφαρμογές στα τρίγωνα

Δείξαμε στην θεωρία, ότι το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
Επίσης δείξαμε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται, όταν σε ένα τρίγωνο, ένα τμήμα είναι παράλληλο σε μία πλευρά του και ισούται με το μισό της.

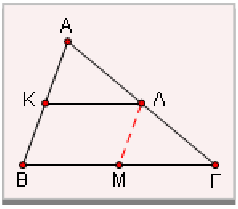
Παράδειγμα 1



Στο διπλανό τρίγωνο είναι $\mathbf{K\Lambda} = // \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Θα αποδείξουμε ότι τα **Κ** , **Λ** είναι τα μέσα των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα.

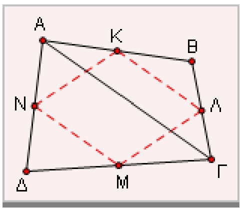
Πραγματικά



Παίρνουμε το μέσο **Μ** της πλευράς **ΒΓ**
Τότε είναι **ΒΜ** = // **ΚΛ** άρα το τετράπλευρο **ΚΛΜΒ** θα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε **ΜΛ // ΑΒ**
Επομένως, αφού **ΜΛ // ΑΒ** και **Μ** μέσο της **ΒΓ** σύμφωνα με τη θεωρία θα είναι και **Λ** μέσο της **ΑΓ**
Ομοίως από το μέσο **Λ** πλέον της **ΑΓ** πηγαίνουμε παράλληλα προς την **ΒΓ**
Άρα και το **Κ** θα είναι μέσο της **ΑΒ**.

Συνεχίζοντας παραθέτουμε έναν τρόπο κατασκευής παραλληλογράμμου.

Παράδειγμα 2



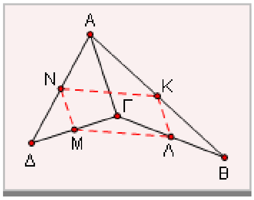
Θα αποδείξουμε ότι τα μέσα των πλευρών κάθε κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Πραγματικά

Έστω το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** και **Κ** , **Λ** , **Μ** , **Ν** μέσα των πλευρών του. Φέρνουμε την διαγώνιο **ΑΓ**

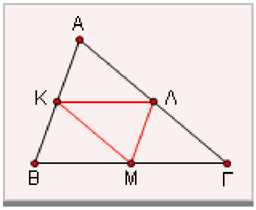
Στο τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι $\mathbf{K\Lambda} = // \dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$ και ομοίως είναι και $\mathbf{MN} = // \dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Οπότε **ΚΛ** = // **ΜΝ** , άρα το **ΚΛΜΝ** είναι **παραλληλόγραμμο**.



Να τονίσουμε ότι το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που έχουμε μη κυρτό τετράπλευρο.
Είναι προφανές ότι
στο διπλανό σχήμα το **ΚΛΜΝ** είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το τρίγωνο που έχει σαν κορυφές τα μέσα πλευρών τριγώνου, έχει την μισή περίμετρο σε σχέση με το αρχικό.



Παράδειγμα **3**

Θα αποδείξουμε ότι η περίμετρος του τριγώνου **ΚΛΜ** του οποίου οι κορυφές είναι τα μέσα του τριγώνου **ΑΒΓ** είναι η μισή της περιμέτρου του **ΑΒΓ**

Πραγματικά

Αφού το **ΚΛ** ενώνει τα μέσα των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ**, έχουμε $\mathbf{ΚΛ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}}$

Ομοίως και για τα τμήματα **ΚΜ** και **ΜΛ** έχουμε $\mathbf{ΚΜ} = \dfrac{\mathbf{ΑΓ}}{\mathbf{2}}$ και $\mathbf{ΜΛ} = \dfrac{\mathbf{ΑΒ}}{\mathbf{2}}$

Αν προσθέσουμε τις τρεις αυτές σχέσεις κατά μέλη

θα έχουμε $\mathbf{ΚΛ} + \mathbf{ΚΜ} + \mathbf{ΜΛ} = \dfrac{\mathbf{ΑΒ} + \mathbf{ΒΓ} + \mathbf{ΑΓ}}{\mathbf{2}}$, δηλαδή $\mathbf{Π_{ΚΛΜ}} = \dfrac{\mathbf{Π_{ΑΒΓ}}}{\mathbf{2}}$

Ασκήσεις

α.1● Έστω το τρίγωνο **ΑΒΓ** και **Δ**, **Ε** τα μέσα των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ**
Να αποδείξετε ότι τα σημεία **Δ** και **Ε** ισαπέχουν από τη **ΒΓ**

α.2● Στο εσωτερικό τριγώνου **ΑΒΓ** παίρνουμε τυχαίο σημείο **Δ**
Αν **Ε**, **Ζ** είναι τα μέσα των **ΔΒ**, **ΔΓ** και **Μ**, **Ν** είναι τα μέσα των **ΑΒ**, **ΑΓ** αντίστοιχα, δείξτε ότι τα **Μ**, **Ν**, **Ζ** και **Ε** είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

α.3● Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο
που έχει κορυφές τα **μέσα** δύο απέναντι πλευρών κυρτού τετραπλεύρου και τα μέσα των διαγωνίων του, είναι παραλληλόγραμμο.

α.4● Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** τα σημεία **Μ**, **Ε**, **Δ** και **Ζ** είναι τα μέσα των **ΒΓ**, **ΒΜ**, **ΑΓ** και **ΒΔ** αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

α) **ΕΖ // ΑΒ** β) **ΑΒ = 4ΖΕ**

α.5● Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ** τριγώνου **ΑΒΓ** διχοτομεί οποιοδήποτε τμήμα **ΑΖ**, με **Ζ** σημείο της **ΒΓ**

α.6● Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** προεκτείνουμε την πλευρά **ΑΒ** κατά τμήμα $\mathbf{B\Delta} = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{2}}$

Αν είναι **Ε** το **μέσο** της **ΑΓ**, να αποδείξετε ότι η **ΒΓ** **διχοτομεί** τη **ΔΕ**

α.7● Αν **Ε** και **Ζ** τα **μέσα** των πλευρών **ΑΒ** και **ΓΔ** ενός **παραλληλογράμμου** **ΑΒΓΔ** να αποδείξετε ότι τα **ΑΖ** και **ΓΕ** χωρίζουν τη **διαγώνιο ΒΔ** σε **τρία ίσα τμήματα**.

α.8● Αν **Δ** το **μέσο** της διαμέσου **ΑΜ** τριγώνου **ΑΒΓ** και **Ε** το σημείο τομής των **ΒΔ** και **ΑΓ**, να αποδείξετε ότι $\mathbf{AE} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{\Gamma E}$

α.9● Έστω το τρίγωνο **ΑΒΓ**
με $\mathbf{AB} < \mathbf{A\Gamma}$, η **διχοτόμος** του **ΑΔ** και το **μέσο Μ** της **ΒΓ**
Αν **Ε** η **προβολή** του **Β** στη **διχοτόμο ΑΔ**

να αποδείξετε ότι α) $\mathbf{EM} \parallel \mathbf{A\Gamma}$ β) $\mathbf{EM} = \dfrac{\mathbf{A\Gamma} - \mathbf{AB}}{\mathbf{2}}$ γ) $\mathbf{\Delta\hat{E}M} = \dfrac{\hat{\mathbf{A}}}{\mathbf{2}}$

α.10● Έστω το παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ** και τα μέσα **Ε** και **Ζ** των **ΒΓ** και **ΓΔ** αντίστοιχα. Αν η **ΕΖ** τέμνει τη διαγώνιο **ΑΓ** στο **Η**, να αποδείξετε ότι $\mathbf{\Gamma H} = \dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{4}}$

α.11● Σε παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ** παίρνουμε σημεία **Ε** και **Ζ** στις πλευρές **ΑΒ** και **ΓΔ** αντίστοιχα έτσι, ώστε $\mathbf{AE} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{AB}$ και $\mathbf{\Gamma Z} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{\Gamma\Delta}$

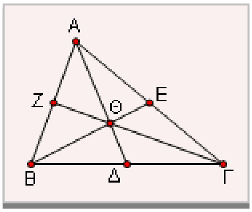
Αν η **ΕΖ** τέμνει την ευθεία **ΑΔ** στο σημείο **Μ**, να αποδείξετε ότι $\mathbf{A\Delta} = \mathbf{M\Delta}$

α.12● Έστω το τρίγωνο **ΑΒΓ**

Έστω **Μ** μέσο της **ΒΓ** και **Αx** η **εξωτερική διχοτόμος** της γωνίας $\hat{\mathbf{A}}$
Αν **Δ** η προβολή του **Β** στην **Αx**, να δείξετε ότι

α) $\mathbf{\Delta M} \parallel \mathbf{A\Gamma}$ β) $\mathbf{\Delta M} = \dfrac{\mathbf{(AB + A\Gamma)}}{\mathbf{2}}$ γ) η **ΔΜ** **διχοτομεί** την πλευρά **ΑΒ**

β Βαρύκεντρο και ορθόκεντρο τριγώνου



Για το βαρύκεντρο ενός τριγώνου δείξαμε πιο πάνω ότι η απόστασή του από μία κορυφή ενός τριγώνου θα ισούται με τα $\frac{2}{3}$ την αντίστοιχης διαμέσου.

Στο διπλανό λοιπόν σχήμα είναι $\mathbf{ΑΘ} = \frac{2}{3}\mathbf{ΑΔ}$

Ακόμη θα είναι και $\mathbf{ΘΔ} = \frac{1}{3}\mathbf{ΑΔ}$ άρα και $\mathbf{ΑΘ} = \mathbf{2ΑΔ}$

Ομοίως και για τις άλλες διαμέσους.

Στην απόδειξη για το βαρύκεντρο, αποδείξαμε ότι αν οι δύο διάμεσοι του τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο, τότε και η τρίτη διάμεσος θα διέρχεται από αυτό. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μία βασική μέθοδο για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες συντρέχουν σε κάποιο σημείο.

Το ίδιο ισχύει για το ορθόκεντρο και το έγκεντρο.

Ας δούμε το παρακάτω χαρακτηριστικό θέμα.

Θέμα 1

Έστω το παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ**

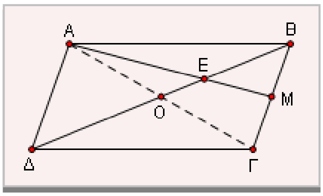
Έστω το μέσο **Μ** της **ΒΓ** και το σημείο τομής **Ε** των **ΑΜ** και **ΒΔ**

Θα αποδείξουμε ότι α) $\mathbf{ΑΕ} = \mathbf{2ΕΜ}$

β) $\mathbf{ΔΕ} = \mathbf{2ΕΒ}$

γ) Η ευθεία **ΓΕ** **διέρχεται** από το **μέσο** της **ΑΒ**

Απάντηση



α) Φέρνουμε τη διαγώνιο **ΑΓ**

Στο τρίγωνο **ΑΒΓ** οι **ΑΜ** και **ΒΟ** είναι διάμεσοι οπότε το **Ε** είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Άρα $\mathbf{ΑΕ} = \mathbf{2ΕΜ}$

β) Είναι $\mathbf{ΔΕ} = \mathbf{ΔΟ} + \mathbf{ΟΕ} = \mathbf{ΒΟ} + \mathbf{ΟΕ} = (\mathbf{ΒΕ} + \mathbf{ΟΕ}) + \mathbf{ΟΕ}$

$= \mathbf{ΒΕ} + \mathbf{2ΟΕ} = \mathbf{ΒΕ} + \mathbf{ΒΕ} = \mathbf{2ΒΕ}$ διότι $\mathbf{ΒΕ} = \mathbf{2ΟΕ}$

γ) Επειδή το **Ε** είναι βαρύκεντρο του τριγώνου **ΑΒΓ**, η ευθεία **ΓΕ** είναι ο φορέας της τρίτης διαμέσου.

Άρα η **ΓΕ** διέρχεται από το μέσο της πλευράς **ΑΒ**

Ασκήσεις

β.1● Προεκτείνουμε την πλευρά **ΑΒ** παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ** κατά τμήμα **ΒΕ** = **ΑΒ**. Η ευθεία **ΕΔ** τέμνει την ευθεία **ΒΓ** στο **Ζ** και την **ΑΓ** στο **Η**
Αν **Ο** το κέντρο του παραλληλογράμμου
Να αποδείξετε ότι α) $\mathbf{ΒΖ = ΓΖ}$ β) $\mathbf{ΓΗ = 2ΟΗ}$ γ) $\mathbf{ΓΗ = \frac{1}{2}ΑΗ}$

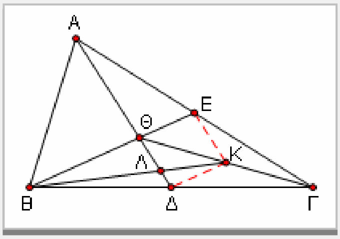
β.2● Σε ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{\mathbf{Α}} = \mathbf{90^\circ}$
προεκτείνουμε την **ΓΑ** προς το μέρος του **Α**, κατά τυχαίο τμήμα **ΑΕ**
Από το **Ε** φέρνουμε $\mathbf{ΕΚ \perp ΒΓ}$ η οποία τέμνει την **ΑΒ** στο σημείο **Ρ**
Να αποδείξετε ότι $\mathbf{ΓΡ \perp ΕΒ}$

β.3● Αν **Μ** και **Ν** τα μέσα των πλευρών **ΔΓ** και **ΒΓ** ενός παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ** να αποδείξετε ότι τα τμήματα **ΑΜ** και **ΑΝ** τριχοτομούν τη διαγώνιο **ΒΔ**

β.4● Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών τριγώνου **ΑΒΓ** έχει το ίδιο βαρύκεντρο με το **ΑΒΓ**

β.5● Αν σε τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι $\mathbf{μ_β = μ_γ}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{β = γ}$.

β.6● Έστω το τρίγωνο **ΑΒΓ** με **ΑΒ** < **ΑΓ**
και οι **διάμεσοι** **ΑΔ**, **ΒΕ**
που τέμνονται στο σημείο **Θ**
Το **Κ** είναι το **μέσο** της **ΘΓ**
και **Λ** το σημείο τομής των **ΒΚ**, **ΑΔ**



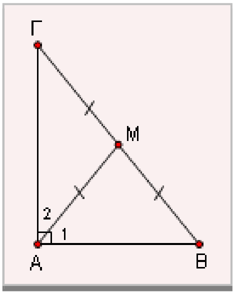
Να αποδείξετε ότι α) $\mathbf{ΘΛ = \frac{2}{9}ΑΔ}$ β) το **ΘΕΚΔ** είναι **παραλληλόγραμμο**.

β.7● Σε κυρτό τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** θεωρούμε το βαρύκεντρο **Κ** του τριγώνου **ΑΒΓ** και τα μέσα **Ε**, **Ζ** και **Η** των **ΑΒ**, **ΓΔ** και **ΚΔ** αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι **ΕΗ // ΚΖ**

β.8● Έστω το τρίγωνο **ΑΒΓ**, το ύψος του **ΒΔ** και το **μέσο** **Μ** του **ΓΔ**
Προεκτείνουμε τη **ΔΒ** κατά τμήμα **ΒΕ** = **ΒΔ**
Να αποδείξετε ότι η **κάθετη** από το **Μ** στην **ΑΒ**, η **κάθετη** από το **Α** στην **ΕΓ** και η **ΒΔ** **συντρέχουν**.

γ Ιδιότητες ορθογώνιου τριγώνου

Αρχικά ας δούμε έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης το ότι η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$.

Στο τρίγωνο αυτό η γωνία $\hat{\mathbf{A}}$ είναι η μεγαλύτερη των άλλων δύο, οπότε θα υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{M}$ της πλευράς $\mathbf{B\Gamma}$ έτσι ώστε η γωνία $\hat{\mathbf{A}}_1$ να είναι ίση με την γωνία $\hat{\mathbf{B}}$.

Όμως είναι $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}}$ άρα $\hat{\mathbf{A}}_1 + \hat{\mathbf{A}}_2 = \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}}$ ή $\hat{\mathbf{A}}_2 = \hat{\mathbf{\Gamma}}$.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι προκύπτουν δύο ισοσκελή τρίγωνα τα $\mathbf{ABM}$ και $\mathbf{A\Gamma M}$ με $\mathbf{AM} = \mathbf{MB}$ και $\mathbf{AM} = \mathbf{M\Gamma}$

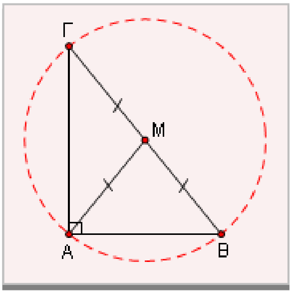
Οπότε είναι $\mathbf{MB} = \mathbf{M\Gamma}$ δηλαδή το $\mathbf{M}$ είναι μέσο της $\mathbf{A\Gamma}$ και $\mathbf{AM} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το μέσο της υποτείνουσας ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Θα δείξουμε ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$, ο κύκλος διαμέτρου $\mathbf{B\Gamma}$ διέρχεται από την κορυφή $\mathbf{A}$



Πραγματικά

Αν $\mathbf{M}$ είναι το μέσο της υποτείνουσας $\mathbf{B\Gamma}$ τότε ισχύει $\mathbf{MA} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}} = \mathbf{MB} = \mathbf{M\Gamma}$.
Οπότε ο κύκλος διαμέτρου $\mathbf{B\Gamma}$ διέρχεται και από το $\mathbf{A}$.

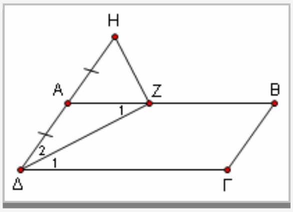
Να παρατηρήσουμε δηλαδή ότι στα ορθογώνια τρίγωνα το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του, το οποίο είναι και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, (περίκεντρο), ταυτίζεται με το μέσο της υποτείνουσας.

Αρκετά από τα θέματα που θα συναντήσουμε στη συνέχεια της ύλης μας, ζητούν να αποδείξουμε ότι κάποιο τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή απλά ότι κάποια γωνία είναι ορθή.
Καλό είναι λοιπόν να έχουμε πάντα στο νου μας και το θεώρημα που λέει ότι αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Μια εφαρμογή του είναι στα παρακάτω δύο θέματα.

Θέμα 1

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ προεκτείνουμε την πλευρά του $ΔΑ$ κατά τμήμα $ΑΗ = ΑΔ$



Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Δ}$ που τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο $Ζ$

α) Θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $ΑΔΖ$ είναι **ισοσκελές**.

β) Θα αποδείξουμε ότι η γωνία $Δ\hat{Ζ}Η$ είναι **ορθή**.

Απάντηση

α) Είναι $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ αφού η $ΔΖ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$

και $\hat{Δ}_1 = \hat{Ζ}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $ΑΒ$, $ΓΔ$ τεμνόμενες από την $ΔΖ$

Άρα $\hat{Δ}_2 = \hat{Ζ}_1$ οπότε το τρίγωνο $ΑΔΖ$ είναι ισοσκελές.

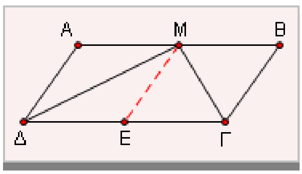
β) Στο τρίγωνο $ΔΖΗ$ η διάμεσος $ΑΖ$ ισούται με το μισό της πλευράς $ΔΗ$ στην οποία καταλήγει, άρα το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο, δηλαδή $Δ\hat{Ζ}Η = 90^o$

Θέμα 2

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 2ΒΓ$ παίρνουμε το μέσο $Μ$ της $ΑΒ$

Θα δείξουμε ότι η γωνία $Δ\hat{Μ}Γ$ είναι **ορθή**.

Απάντηση



Φέρνουμε την $ΜΕ // ΒΓ$, οπότε το τετράπλευρο $ΒΜΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Είναι λοιπόν $ΑΒ = 2ΒΓ$, όμως $ΑΒ = ΔΓ$ και $ΜΕ = ΒΓ$

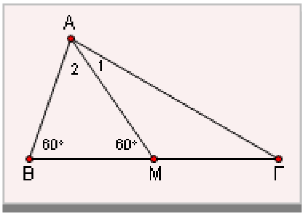
Δηλαδή έχουμε $ΔΓ = 2ΜΕ$ και $Ε$ μέσο της $ΔΓ$, άρα $Δ\hat{Μ}Γ = 90^o$

Βέβαια δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε πάντα το συγκεκριμένο θεώρημα.

Θέμα 3

Αν σε τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι $\hat{B} = 60^o$ και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

Απάντηση



Παίρνουμε το μέσο **Μ** της πλευράς **ΒΓ**
Το τρίγωνο **ΑΒΜ** είναι ισοσκελές με $AB = BM$
και αφού $\hat{B} = 60^o$, θα είναι τελικά ισόπλευρο.
Επομένως $AM = BM = M\Gamma$ οπότε στο ισοσκελές
τρίγωνο **ΜΑΓ** είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$. Όμως $\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 60^o$, άρα $\hat{A}_1 = 30^o$

Τελικά αφού $\hat{A}_2 = 60^o$, θα είναι $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$

Τέλος παραθέτουμε ένα χαρακτηριστικό θέμα που συνδέει το ύψος προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου, με την υποτείνουσα, όταν η μία οξεία γωνία του τριγώνου είναι 15^o

Θέμα 4

Σε ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε το **ύψος** του **ΑΔ**

Θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 15^o$ αν και μόνον αν $A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$

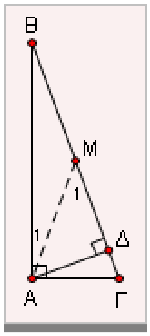
Απάντηση

Φέρνουμε την διάμεσο **ΑΜ**

Είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma$, οπότε στο τρίγωνο **ΑΜΒ**
απέναντι από ίσες πλευρές θα βρίσκονται και ίσες γωνίες
άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}$

Επίσης, είναι $\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B}$ ως εξωτερική στο **ΑΜΒ**

Επομένως $\hat{M}_1 = 2\hat{B}$



Τέλος, αποδεικνύουμε το ευθύ και το αντίστροφο ταυτόχρονα

είναι $\hat{B} = 15^o \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 30^o \Leftrightarrow A\Delta = \frac{MA}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$

Ασκήσεις

γ.**1**● Σε ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\hat{A} = 90^o$) είναι $ΑΓ = 8\,cm$ και $ΑΒ = 6\,cm$
Από το μέσο **Δ** της **ΑΓ** φέρνουμε $ΔΕ // ΑΒ$ και τη διάμεσο **ΔΜ** του τριγώνου **ΔΕΓ**. Αν $ΕΒ = 5\,cm$ να υπολογίσετε τα **ΔΕ**, **ΔΜ**

γ.**2**● Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** θεωρούμε τα ύψη **ΒΔ** και **ΓΕ**

Να αποδείξετε ότι τα σημεία **Δ** και **Ε** **ισαπέχουν** από το **μέσο** της πλευράς **ΒΓ**

γ.**3**● Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\hat{A} = 90^o$), με $\hat{B} = 30^o$
Αν **Ε**, **Ζ** είναι τα μέσα των **ΑΒ** και **ΑΓ**, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = ΑΓ$

γ.**4**● Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\hat{A} = 90^o$)
με **Κ**, **Λ**, **Μ** τα μέσα των πλευρών του **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΑ** αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι
α) Το **ΚΛΜΑ** είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
β) Το άθροισμα των διαγωνίων του **ΚΛΜΑ** είναι ίσο με την υποτείνουσα **ΒΓ**

γ.**5**● Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\hat{A} = 90^o$)

Έστω $\hat{B} = 30^o$, **Δ** και **Ε** τα μέσα των **ΑΒ**, **ΒΓ** και προεκτείνουμε την **ΕΔ** κατά τμήμα $ΔΖ = ΕΔ$
Να αποδείξετε ότι το **ΑΓΕΖ** είναι **ρόμβος**.

γ.**6**● Από το μέσο **Δ** της πλευράς **ΑΒ** τριγώνου **ΑΒΓ** φέρνουμε κάθετη στην **ΑΒ**, η οποία τέμνει τη **ΒΓ** στο σημείο **Ε**. Αν το **Ε** είναι μέσο της **ΒΓ**, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι ορθογώνιο.

γ.**7**● Σε ένα τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{B} = 2\hat{Γ}$ φέρνουμε την διχοτόμο **ΒΔ**
Από το μέσο **Μ** της **ΑΓ** φέρνουμε παράλληλη προς τη **ΒΔ** που τέμνει τη **ΒΓ** στο σημείο **Ε**. Να αποδειχθεί ότι $ΑΕ \perp ΒΓ$

γ.**8**● Σε παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ**

είναι $\hat{A} = 60^o$ και **ΑΚ** διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ όπου **Κ** σημείο της **ΒΓ**

Αν **Λ** μέσο της **ΑΚ** να αποδείξετε ότι η **ΒΛ** διχοτομεί την γωνία $\hat{B}$
και να εκφράσετε τη **ΒΛ** συναρτήσει του **ΓΔ**

γ.9● Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ ($\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$) και το ύψος του $\mathbf{A\Delta}$

α) Αν $\mathbf{E}$, $\mathbf{Z}$ είναι τα μέσα των $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\mathbf{E\hat{\Delta}Z} = \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$

β) Αν $\mathbf{M}$ είναι το μέσο της $\mathbf{EZ}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{\Delta M} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{4}}$

γ.10● Σε τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathbf{B}} > \hat{\mathbf{\Gamma}}$ φέρνουμε το ύψος $\mathbf{A\Delta}$

Αν $\mathbf{E}$ και $\mathbf{Z}$ είναι τα μέσα των $\mathbf{A\Gamma}$ και $\mathbf{B\Gamma}$ αντίστοιχα , αποδείξτε ότι $\mathbf{\Delta\hat{E}Z} = \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{\Gamma}}$

γ.11● Να αποδείξετε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο, η γωνία του ύψους και της διαμέσου που άγονται από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με τη διαφορά των οξειών γωνιών του τριγώνου.

γ.12● Έστω $\mathbf{E}$ και $\mathbf{Z}$ τα μέσα των πλευρών $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{B\Gamma}$ ορθογωνίου $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$
Αν $\mathbf{H}$ και $\mathbf{\Theta}$ είναι οι προβολές των κορυφών $\mathbf{A}$ και $\mathbf{\Gamma}$ πάνω στη διαγώνιο $\mathbf{B\Delta}$
να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathbf{EH}$ και $\mathbf{Z\Theta}$ είναι **κάθετες**.

γ.13● Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ ($\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$)

Είναι $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{30^o}$ και το ύψος του $\mathbf{A\Delta}$
Από το $\mathbf{B}$ φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο $\mathbf{AM}$ που τέμνει αυτή στο $\mathbf{Z}$ ($\mathbf{BZ} \perp \mathbf{AM}$)
Να αποδείξετε ότι $\mathbf{BZ} = \mathbf{Z\Delta} = \mathbf{A\Delta}$

γ.14● Αν σε τρίγωνο $\mathbf{AB\Gamma}$ ισχύει $\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{120^o}$, να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{\delta_\alpha} = \mathbf{2}\boldsymbol{\upsilon_\alpha}$

γ.15● Δύο κύκλοι $(\mathbf{O}, \boldsymbol{\rho})$ και $(\mathbf{K}, \mathbf{3}\boldsymbol{\rho})$ εφάπτονται εξωτερικά και μια ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon}$

εφάπτεται των κύκλων στα σημεία $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Να υπολογίσετε την γωνία $\mathbf{A\hat{O}K}$

γ.16● Δίνεται τετράγωνο $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ και στις πλευρές του $\mathbf{A\Delta}$ και $\mathbf{\Delta\Gamma}$ παίρνουμε τμήματα $\mathbf{AK} = \mathbf{\Delta\Lambda}$. Αν $\mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$ είναι τα μέσα των $\mathbf{K\Lambda}$ και $\mathbf{B\Lambda}$ αντίστοιχα
να αποδείξετε ότι $\mathbf{MN} \perp \mathbf{A\Lambda}$

γ.17● Θεωρούμε ένα τετράγωνο $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ και μία ορθή γωνία $\mathbf{x\hat{\Delta}y}$ που οι πλευρές της τέμνουν τους φορείς των $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B\Gamma}$ στα σημεία $\mathbf{E}$, $\mathbf{Z}$ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{A\Gamma}$ διχοτομεί το τμήμα $\mathbf{EZ}$

Εργασία

1☐ Αν σε ένα τρίγωνο **ΑΒΓ** η πλευρά **ΑΒ** είναι ίση με το μισό της **ΒΓ** τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο **Α** με γωνία $\hat{\Gamma} = 30^o$

2☐ Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια οξεία γωνία του είναι διπλάσια από την άλλη, τότε η υποτείνουσα θα είναι διπλάσια από την μία κάθετη πλευρά του.

3☐ Τα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών τετραπλεύρου διχοτομούνται.

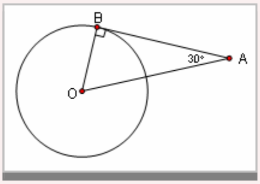
4☐ Τα τμήματα που συνδέουν τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου, χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα.

5☐ Αν **Α** είναι ένα σταθερό σημείο και **Β** είναι ένα σημείο το οποίο κινείται πάνω σε μία ευθεία, τότε το μέσο **Μ** της **ΑΒ** θα κινείται πάνω σε μία ευθεία.

6✷ Αν σε ρόμβο **ΑΒΓΔ** με $\hat{A} = 60^o$ και **Ο** το σημείο τομής των διαγωνίων είναι $OB = \lambda \cdot AB$ τότε το λ ισούται με

☐Α: **2** ☐Β: $\frac{1}{2}$ ☐Γ: $\frac{1}{3}$ ☐Δ: **1**

7✷ Αν **ΑΒ** η εφαπτόμενη στον κύκλο $(O, 4\text{ cm})$ και η γωνία $\hat{A} = 30^o$ τότε η **ΟΑ** είναι



☐Α: **8 cm** ☐Β: **10 cm** ☐Γ: **12 cm** ☐Δ: **14 cm**

8✷ Αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μία γωνία 120^o τότε το ύψος προς τη βάση του είναι ίσο με

☐Α: το μισό της βάσης ☐Β: το μισό της μίας από τις ίσες πλευρές

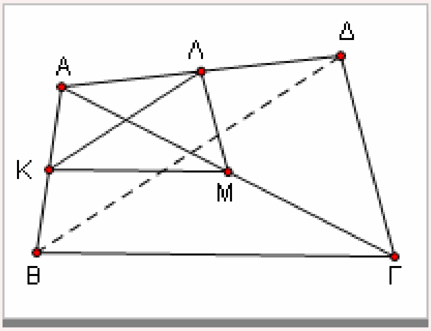
☐Γ: το ένα τέταρτο της βάσης ☐Δ: την βάση

9✷ Έστω τρίγωνο **ΑΒΓ** ορθογώνιο στο **Α** με $\hat{\Gamma} = 30^o$. Αν **ΑΔ** το ύψος προς την υποτείνουσα **ΒΓ**, τότε το **ΓΔ** είναι ίσο με

□Α: **ΒΔ** □Β: **ΑΒ** □Γ: **ΑΔ + ΔΒ** □Δ: **3ΒΔ**

10☞ Στο σχήμα τα **Κ**, **Λ** είναι τα μέσα των πλευρών **ΑΒ**, **ΑΔ** του τετραπλεύρου **ΑΒΓΔ** και **Μ** είναι μέσο της διαγωνίου **ΑΓ**. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης με ένα μόνο στοιχείο της δεύτερης στήλης.

Στήλη Α	Στήλη Β
1.ΚΛ	α) $\frac{ΑΓ}{2}$
2.ΚΜ	β) $\frac{ΒΓ}{2}$
3.ΛΜ	γ) $\frac{ΒΔ}{2}$
	δ) $\frac{ΔΓ}{2}$



11● Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο να ταυτίζονται.

12● Έστω ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{A} = 90^o$ και **Μ** το μέσο της **ΒΓ**
Να εξετάσετε αν ο κύκλος **(Μ, ΜΒ)** διέρχεται από τα **Α** και **Γ**.

13● Αν **Ε**, **Ζ** είναι τα μέσα των πλευρών **ΑΔ**, **ΒΓ** κυρτού τετραπλεύρου **ΑΒΓΔ** αντίστοιχα με **ΒΔ > ΑΓ**, να αποδείξετε ότι **ΕΖ < ΒΔ**

14● Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** με **ΑΒ = ΑΓ**. Αν **Δ**, **Ε** είναι μεταβλητά σημεία των πλευρών **ΑΒ**, **ΑΓ** αντίστοιχα, τέτοια ώστε **ΑΔ = ΓΕ**, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου **ΔΕ**

15● Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\hat{A} = 90^o$) το ύψος του **ΑΔ** και η διάμεσος **ΑΜ** και **Ε**, **Ζ** οι προβολές του σημείου **Δ** στις **ΑΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι
α) **ΑΔ = ΕΖ**
β) **ΑΜ ⊥ ΕΖ**
γ) η διάμεσος **ΑΜ**, το **ΔΖ** και η παράλληλη προς την **ΕΖ** από το **Β** **συντρέχουν**.